COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel positif ou nul. Soit $\mathbb{D}$ un intervalle ouvert, inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On dira que la fonction de variable réelle f définie sur $\mathbb{D}$ est solution sur $\mathbb{D}$ de l'équation différentielle (E_n) si et seulement si elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{D}$ et si :

$$\forall x \in \mathbb{D}, \quad x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - n^2) f(x) = 0$$

Les parties I, II, III, IV et V sont largement indépendantes. Le candidat pourra admettre les résultats qu'il n'aura pas su démontrer pour poursuivre le problème.

PARTIE I

Calcul d'une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$

I.1 - Montrer que toute fonction f, solution de (E_n) sur $\mathbb{D}$, est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{D}$.

I.2 - a) Soit $(a_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout réel positif x, la série de terme général $a_k^n x^k$ soit convergente. On suppose que $a_0^n \neq 0$.

soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction J_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$J_n(x) = x^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n x^k$$

est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

$$(1) \quad \begin{cases} (m^2 - n^2)\, a_0^n = 0 \\ \left[(m+1)^2 - n^2\right] a_1^n = 0 \\ \left[(m+k)^2 - n^2\right] a_k^n + a_{k-2}^n = 0 \quad \forall k \geq 2 \end{cases}$$

b) Montrer que le système (1) est équivalent à :

$$(2) \quad \begin{cases} m = n \\ a_{2r-1}^n = 0 \qquad \forall r \geq 1 \\ a_{2r}^n = a_0^n \dfrac{(-1)^r}{2^{2r} r!(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)} \qquad \forall r \geq 1 \end{cases}$$

c) a_0^n étant choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}$, démontrer que la série de terme général $a_k^n x^k$, où les a_k^n sont définis par le système (2), est effectivement convergente pour tout réel positif x.

On choisira, dans la suite du problème, $a_0^n = \dfrac{1}{2^n . n!}$, ce qui conduit à l'expression suivante de J_n, solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n . \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} . \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

PARTIE II

Etude de la forme générale des solutions de (E_n) au voisinage de 0

II.1 - a) Montrer que J_n admet un développement limité à tout ordre p au voisinage de 0, de la forme :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!} \left(1 + \alpha_1^n x^2 + \ldots\ldots + \alpha_p^n x^{2p} + o(x^{2p})\right)$$

b) Montrer que l'on peut choisir un réel ε_n tel que :

$\varepsilon_n > 0$ et $J_n(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \varepsilon_n[$

c) On désigne par j_n la restriction de J_n à $]0, \varepsilon_n[$. A toute fonction f_n solution de (E_n) sur $]0, \varepsilon_n[$, on associe la fonction u_n définie sur $]0, \varepsilon_n[$ par :

$$f_n = u_n . j_n$$

/. .

Montrer que u_n est indéfiniment dérivable et vérifie :

$$(3) \quad u_n'' + 2 \cdot \frac{j_n'}{j_n} \cdot u_n' + \frac{1}{x} \cdot u_n' = 0 \quad \text{sur }]0, \epsilon_n[$$

d) Résoudre (3) et en déduire que l'on peut écrire :

$$f_n = A_n j_n + B_n y_n$$

avec $y_n(x) = j_n(x) \int_{a_n}^{x} \frac{dt}{t[j_n(t)]^2}$, $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$, $a_n \in]0, \epsilon_n[$

II.2 - Etablir, au voisinage de 0, les développements limités de la forme suivante :

* pour $n = 0$

$$y_0(x) - j_0(x)\text{Log}x = \beta_0 + \beta_1 x^2 + \ldots\ldots + \beta_p x^{2p} + o(x^{2p})$$

* pour $n \geq 1$

$$y_n(x) + \frac{2^{n-1}(n-1)!}{x^n}(1 + \gamma_1 x^2 + \ldots\ldots + \gamma_{n-1} x^{2n-2}) - \Gamma_n j_n(x)\text{Log}x =$$

$$x^n (\delta_0^n + \delta_1^n x^2 + \ldots\ldots + \delta_p^n x^{2p} + o(x^{2p}))$$

(On ne demande pas d'expliciter les β_i, γ_j, Γ_n et δ_k^n).

II.3 - Montrer que l'ensemble des solutions de (E_n) sur $]0, \epsilon_n[$ constitue un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

PARTIE III

Le but de cette partie est de trouver la solution générale de l'équation (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$, en s'inspirant des résultats trouvés au voisinage de 0 (II.2).

III.1 - Etude du cas $n = 0$.

a) Soit $(b_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout réel positif x, la série de terme général :

$$\frac{(-1)^r}{(r!)^2} \cdot b_r \cdot (\tfrac{x}{2})^{2r}$$

soit convergente.

Montrer que la fonction Y_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$Y_0(x) = J_0(x)\text{Log}x - \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \cdot b_r \cdot (\tfrac{x}{2})^{2r}$$

est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

$$\forall\, r \geq 1,\ b_r = b_{r-1} + \frac{1}{r}$$

(On rappelle que $J_0 : x \longmapsto \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \cdot (\tfrac{x}{2})^{2r}$

est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$).

b) - Montrer que la condition précédente peut s'écrire :

$$(4) \quad \forall\, r \geq 1,\ b_r = b_0 + (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{r}).$$

c) - b_0 étant choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}$, démontrer que la série de terme général :

$$\frac{(-1)^r}{(r!)^2} \cdot b_r \cdot (\tfrac{x}{2})^{2r}$$

où les b_r sont définis par (4), est effectivement convergente pour tout réel positif x.

d) - En admettant que l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ constitue un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, montrer finalement que la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ peut s'écrire :

$$f_0 = A_0 J_0 + B_0 Y_0 \quad \text{avec } (A_0, B_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ et :}$$

$$\begin{cases} J_0(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \cdot (\tfrac{x}{2})^{2r} \\ Y_0(x) = J_0(x)\text{Log}x - \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{r})(\tfrac{x}{2})^{2r} \end{cases}$$

III.2 - Etude du cas $n \geq 1$

a) - Soit d_r^n une suite de nombres réels telle que, pour tout réel positif x, la série de terme général :

$$\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} d_r^n (\tfrac{x}{2})^{2r}$$

soit convergente.

I On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une fonction Y_n par :

$$Y_n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{s=0}^{n-1} c_s^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} + \Gamma_n J_n(x)\mathrm{Log}x - \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} d_r^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

les coefficients c_s^n étant réels et c_o^n valant :

$$c_o^n = \frac{(n-1)!}{2}$$

Montrer que Y_n est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

$$(5)\quad \begin{cases} s(n-s)c_s^n - c_{s-1}^n = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant s \leqslant n-1 \\ \Gamma_n - 2(n-1)!c_{n-1}^n = 0 \\ d_r^n - d_{r-1}^n - \frac{1}{2}\Gamma_n\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n+r}\right) = 0 \quad \text{pour } r \geqslant 1 \end{cases}$$

b) - Montrer que le système (5) est équivalent à :

$$(6)\quad \begin{cases} c_s^n = -\frac{(n-s-1)!}{2s!} \quad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant n-1 \\ \Gamma_n = 1 \\ d_r^n = d_o^n + \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+r}\right)\right] \quad \text{pour } r \geqslant 1 \end{cases}$$

c) d_o^n étant choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}$, démontrer que la série de terme général :

$$\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} d_r^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

où les d_r^n sont définis par (6), est effectivement convergente pour tout réel positif x.

d) - En admettant que l'ensemble des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ constitue un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, montrer finalement que la solution générale de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ peut s'écrire :

$f_n = A_n J_n + B_n Y_n$ avec $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

$$Y_n(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} + J_n(x)\mathrm{Log}x -$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+r}\right)\right] \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

On remarquera que si l'on convient d'annuler une sommation du type $\sum_{s=0}^{-1}$, ces formules s'étendent au cas n = 0.

PARTIE IV

Calcul de quelques intégrales faisant intervenir J_n

IV.1 - Etablir les relations suivantes, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

a) - $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$

b) - $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}$

c) - $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad J_n' = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$

d) - $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad J_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{n}(J_{n-1} + J_{n+1})$

IV.2 - Utiliser IV.1-a) pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^x t^n J_{n-1}(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

IV.3 - Utiliser IV.1-b) pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^x t^{-n} J_{n+1}(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N})$$

244

IV.4 - On se propose de calculer $I_n(x) = \int_0^x J_n(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N})$

a) - Utiliser IV.1-c) pour montrer que :

$$\forall\, p \geq 1,\ I_n(x) - I_{n+2p}(x) = 2\sum_{r=0}^{p-1} J_{n+2r+1}(x)$$

b) - Pour n et x fixés, montrer que la série de terme général $J_{n+2r+1}(x)$ est convergente. On pourra utiliser, après l'avoir établie, l'inégalité :

$$\left|J_n(x)\right| \leq \frac{1}{n!}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

c) - Prouver finalement que :

$$I_n(x) = 2\sum_{r=0}^{+\infty} J_{n+2r+1}(x)$$

IV.5 - On se propose de calculer $L_{m,n}(x) = \int_0^x t^m J_n(t)dt$ pour $0 < n < m$.

a) - Si (m-n) est impair, montrer que :

$$L_{m,n}(x) = x^m J_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{\frac{m-n-1}{2}} (-1)^i (m-n-1)(m-n-3)\ldots(m-n-2i+1)\, x^{m-i} J_{n+i+1}(x)$$

(Si m = n+1, on convient d'annuler la somme $\sum_1^0$. On pourra intégrer par parties et appliquer le résultat de IV.2 à chaque itération).

b) Si (m-n) est pair, montrer que :

$$L_{m,n}(x) = x^m J_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i (m-n-1)\ldots(m-n-2i+1)x^{m-i} j_{n+i+1}(x) +$$

$$(-1)^m (m-n-1)(m-n-3)\ldots(1-m-n) I_{m+n}(x)$$

PARTIE V

Soit K_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

Le but de cette partie est de montrer que $J_n = K_n$. On admettra que K_n est deux fois dérivable et que l'on a :

$$K_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left(\cos(n\theta - x\sin\theta)\right)d\theta$$

$$K_n''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d^2}{dx^2}\left(\cos(n\theta - x\sin\theta)\right)d\theta$$

V.1 - a) Ecrire l'expression $x^2K_n''(x)+xK_n'(x)+(x^2-n^2)K_n(x)$ sous forme d'intégrale. Intégrer par parties, en posant :

$v = n + x\cos\theta \qquad du = (n-x\cos\theta).\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$

b) En déduire que :

$$K_n = A_n J_n + B_n Y_n \quad \text{où} \quad (A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$$

c) En calculant $K_n(0)$, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n = 0 \text{ et } A_0 = 1$$

V.2 - Etablir, par des calculs directs, les relations suivantes, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $K_n' = \frac{1}{2}(K_{n-1} - K_{n+1})$

b) $nK_n = \frac{x}{2}(K_{n-1}+K_{n+1})$

c) $xK_n' = nK_n - xK_{n+1}$

V.3 - En utilisant ces relations et les formules analogues pour J_n (IV.1), montrer que $A_n = 1$ pour tout entier n.

En déduire finalement que, pour tout entier n et pour tout réel positif x, on a :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

FIN